LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 11

Primjena višestrukog integrala

Lekcije iz Matematike 2.

11. Primjena višestrukog integrala.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se ilustriraju dvije primjene dvostrukog integrala u inženjerstvu. Prva je u rješavanju problema mase nehomogenog područja u ravnini, a druga u odredjivanju njegova težišta (to je ujedno i primjena u vjerojatnosti i statistici, za dvodimenzionalne razdiobe). Napominju se i analogne primjene trostrukog integrala. Takodjer se ilustrira primjena dvostrukog integrala za računanje površina i jedna primjena u vjerojatnosti.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem mase i težišta ravne nehomogene tanke ploče ili tijela, vrlo je čest u primjenama. Taj se problem može riješiti pomoću dvostrukog integrala (odnosno pomoću trostrukog integrala), pod uvjetom da poznajemo gustoću ploče (odnosno gustoću tijela).

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam dvostrukog integrala i metode računanja usastopnim integriranjem i u polarnim koordinatama. Takodjer je potrebno poznavati sljedeće fizikalne pojmove:

1. Pojam mase i funkcije gustoće mase.
2. Pojam težišta nehomogenog segmenta.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

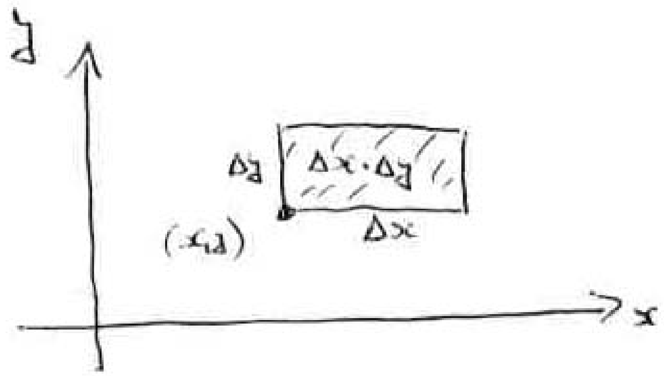
Funkcija gustoće mase područja (ploče) D u ravnini.

Zamislimo da je masa m tanko razmazana po području D u ravnini. Postoje dvije bitno različite mogućnosti. Prva je da je masa razmazana jednoliko; tada kažemo da je područje homogeno (homogena ploča). Druga je mogućnost da je masa razmazana nejednoliko (nehomogeno područje). Tada se karakter razmazavanja opisuje funkcijom gustoće mase f. Srednja gustoća mase na malom pravokutniku sa stranicama $\Delta x, \Delta y$ (sl.1.), prema definiciji je omjer mase i površine:

$$\overline{f(x,y)} := \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Prelaskom na limes, dolazimo do pojma gustoće u točki (x, y):

$$f(x,y) := \lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y}$$



Sl. 1

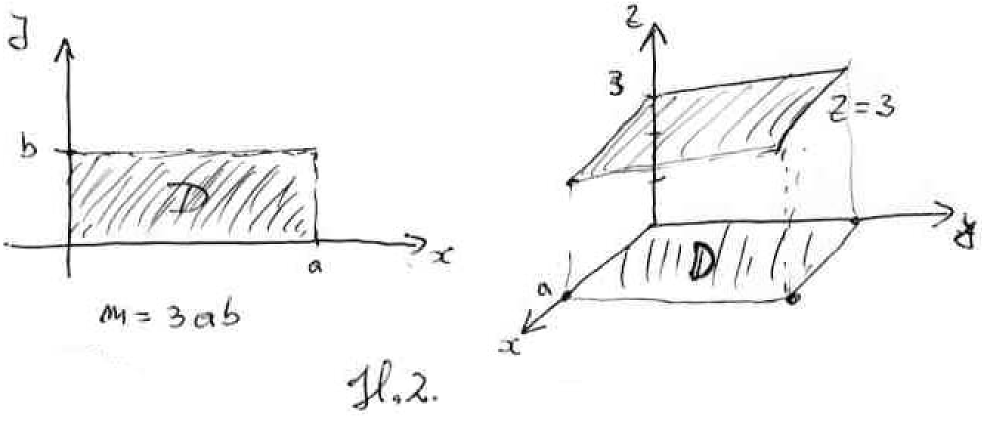
Masa nehomogenog područja D u ravnini u ovisnosti o gustoći. Iz diferencijalne relacije $\Delta m \approx f(x,y)\Delta x\Delta y$, dobijemo $dm = f(x,y)dxdy$ (to slijedi i izravno iz definicije gustoće u točki). Zato je, prema definiciji dvostrukog integrala,

$$m = \int_D f(x,y)dxdy$$

Primjer 1. - primjena formule za masu područja
Neka je D pravokutnik zadan relacijama:

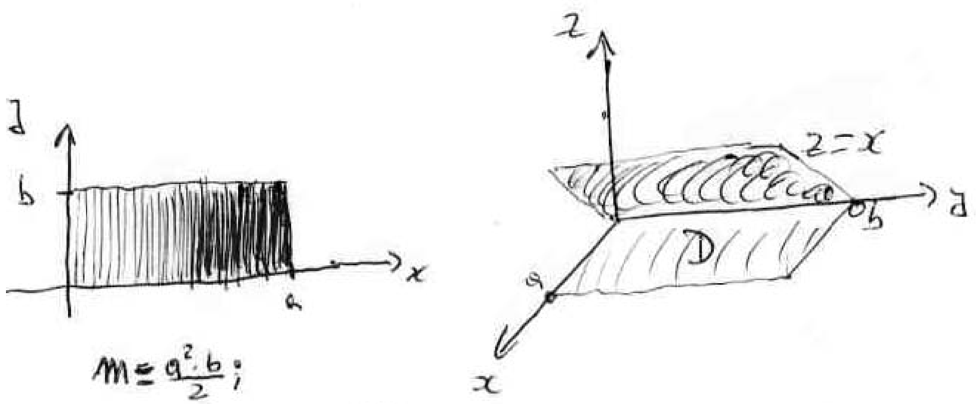
$$0 \leq x \leq a \; i \; 0 \leq y \leq b$$

i neka je redom, funkcija gustoće mase
a) $f(x,y) := 3$, b) $f(x,y) := x$, c) $f(x,y) := xy$.
(i) Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo.
a) Graf je pravokutnik - dio ravnine usporedne s xy ravninom iznad zadanog pravokutnika D (sl.2). Masa je jednoliko razmazana; na jedinicu površine dolaze 3 jedinice mase.



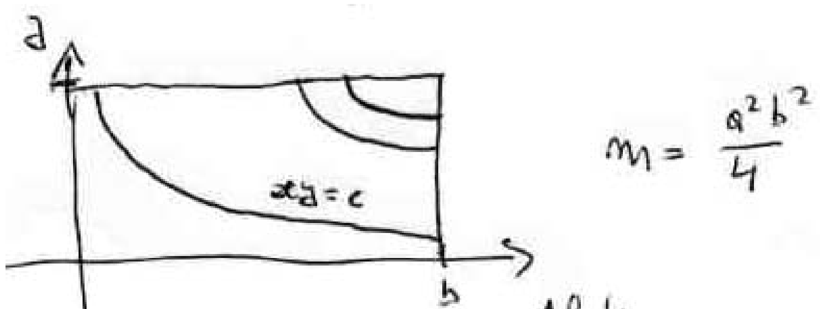
Sl. 2.

b) Graf je dio kose ravnine iznad pravokutnika D, a zadan je jednadžbom $z = x$ (sl.3.). Možemo zamisliti da je masa razmazana po pravokutniku D nekim valjkom kojeg smo postavili na vertikalnu stranicu b, i gurajući valjak horizontalno (uzduž osi x), količinu namaza pojačavamo jediničnom brzinom. Vertikalne linije (dijelovi pravaca s jednadžbom $x = c$, za $0 \leq c \leq a$) imaju stalnu gustoću namaza.



sl.3

c) Graf je dio sedlaste plohe iznad pravokutnika D. Da dočaramo promjenu gustoće namaza, nacrtamo dijelove hiperbola s jednadžbama $xy = c$, za $c > 0$; te hiperbole imaju stalnu gustoću namaza c, a gustoća se povećava s povećavanjem parametra c (sl.4.).



sl.4.

(ii) Odredimo ukupnu masu m.

a) $m = 3 \cdot ab$ jer je, pri jednolikom namazu, masa jednaka umnošku površine i gustoće (to se može dobiti i integriranjem).

b) $m = \int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a [\int_0^b xdy]dx =$

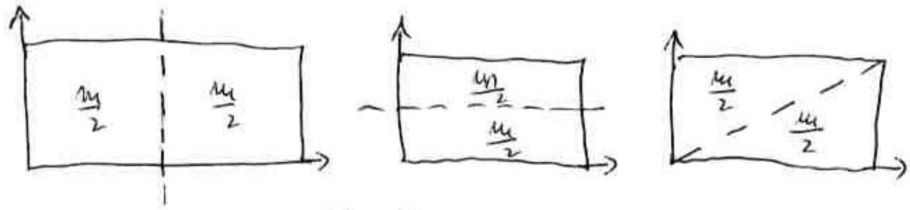
$\int_0^a [xy \mid_{y=0}^{y=b}]dx = \int_0^a bxdx = \frac{a^2 b}{2}$.

Vidimo da je masa proporcionalna b, i kvadratno proporcionalna a. Objasnite!

c) $m = \int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a [\int_0^b xydy]dx =$

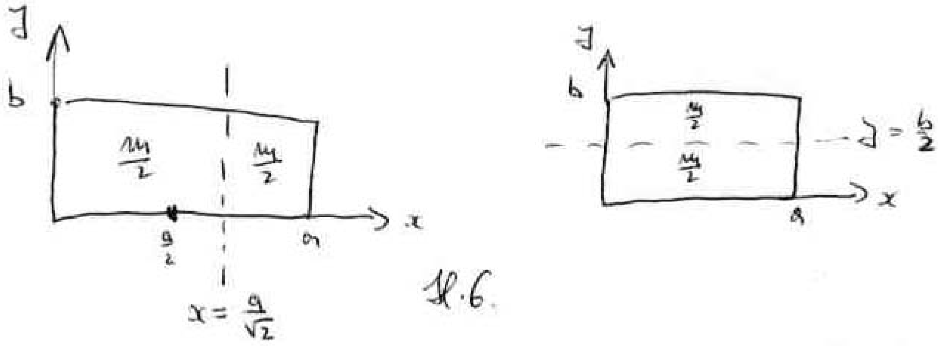
$\int_0^a [x\frac{y^2}{2}\,|_{y=0}^{y=b}]dx = \int_0^a \frac{b^2}{2}xdx = \frac{a^2b^2}{4}$.
Vidimo da je masa kvadratno proporcionalna i a i b. Objasnite!

(iii) Podijelimo područje D vertikalnim pravcem (ili drukčije) na dva dijela jednakih masa.
a) Rješenje je pravac s jednadžbom $x = \frac{a}{2}$. Na slici 5. predočeno je to i neka druga rješenja.



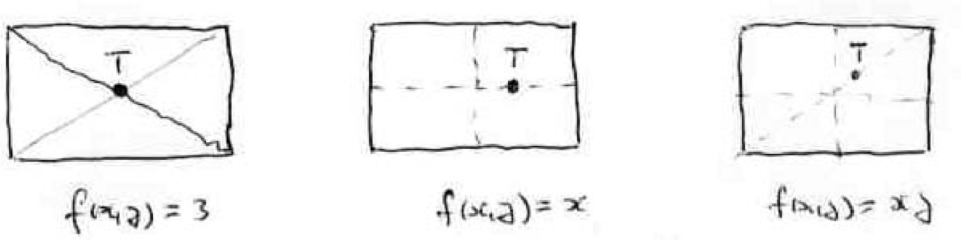
sl. 5.

b) Treba biti:
$\int_0^c [\int_0^b xdy]dx = \frac{a^2b}{4}$, tj. $\frac{c^2b}{2} = \frac{a^2b}{4}$, tj. $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
Na slici 6. je to i još jedno rješenje. Pokušajte naći još neko.
c) Treba biti:
$\int_0^c [\int_0^b xydy]dx = \frac{a^2b^2}{8}$, tj. $\frac{c^2b^2}{4} = \frac{a^2b^2}{8}$, tj. $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$,
kao i u b). Komentirajte!



sl. 6.

(iv) Procijenimo položaj težišta područja D u odnosu na sjecište dijagonala.
a) Težište je u sjecištu dijagonala.
b) Težište je u točki $(c, \frac{b}{2})$ gdje je $c > \frac{a}{2}$.
c) Težište je u točki (c, d) gdje je $c > \frac{a}{2}$ i $d > \frac{b}{2}$ (sl.7.).



Sl. 7.

Težište ravne ploče - područja D u ravnini.
Na osnovi formule za težiste segmenta $[a, b]$ gustoće $f(x)$:

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

i definicije težista, dobijemo prvu i drugu koordinatu težista područja D gustoće $f(x, y)$:

$$x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{\int_D f(x,y)dxdy}$$

Kraće $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m}$.
Slično,

$$y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{\int_D f(x,y)dxdy}$$

tj. $y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{m}$.

Primjer 2. - primjena formule za x_T i y_T.
Odredimo koordinate težišta područja iz Primjera 1.

a) $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot 3 \cdot dy]dx}{3ab} = \frac{3\frac{a^2b}{2}}{3ab} = \frac{a}{2}$.

Slično se dobije $y_T = \frac{b}{2}$, kako smo i predvidjeli u Primjeru 1.(iv).

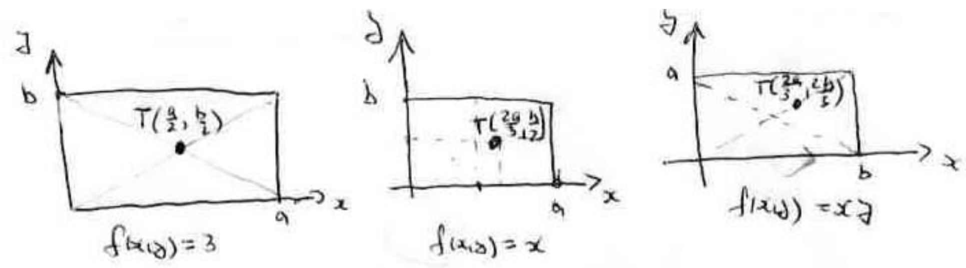
b) $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot x \cdot dy]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a [x^2 y|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a bx^2 dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\frac{a^3b}{3}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{2a}{3}$.

$y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot y \cdot dy]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a [\frac{xy^2}{2}|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a \frac{b^2x}{2}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\frac{b^2a^2}{2}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{b}{2}$

c) $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot xy \cdot dy]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a [x^2 \frac{y^2}{2}|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a \frac{b^2}{2}x^2 dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\frac{a^3b^2}{6}}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{2a}{3}$.

$y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b y \cdot xy \cdot dy]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a [x\frac{y^3}{3}|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a \frac{b^3}{3}xdx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\frac{a^2b^3}{6}}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{2b}{3}$.

Rezultati su predočeni na sl. 8. Prokomentirajte te rezultate.



Sl. 8.

Primjer 3 - primjer gustoće pri kojoj je masa ravnine konačna. Neka je masa razmazana po cijeloj ravnini prema pravilu za gustoću $f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Odredimo masu.

Koristit ćemo se polarnim koordinatama:
$m = \int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy =$

$\int_0^{2\pi} [\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr] d\phi,$

što, nakon zamjene $t = \frac{r^2}{2}$, $dt = rdr$, postaje:

$m = \int_0^{2\pi} [\int_0^{\infty} e^{-t} dt] d\phi = \int_0^{2\pi} [(-e^{-t}) |_0^{\infty}] d\phi = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\phi = 2\pi.$